

ISOMORPHISM THEOREMS FOR SOME PARABOLIC INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN HÖRMANDER SPACES

Valerii Los¹ and Aleksandr Murach²

ТЕОРЕМИ ПРО ІЗОМОРФІЗМИ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

Валерій Лось і Олександр Мурач

In Hörmander inner product spaces, we investigate initial-boundary value problems for an arbitrary second order parabolic partial differential equation and the Dirichlet or Neumann boundary conditions. We prove that the operators corresponding to these problems are isomorphisms between appropriate Hörmander spaces. The regularity of the functions which form these spaces is characterized by a pair of number parameters and a function parameter varying regularly at infinity in Karamata's sense. Owing to this function parameter, the Hörmander spaces describe the regularity of functions more finely than the anisotropic Sobolev spaces.

У гільбертових просторах Хермандера досліджено початково-крайову задачу для довільного параболічного диференціального рівняння другого порядку і крайових умов Діріхле або Неймана. Доведено, що оператори, відповідні цим задачам, є ізоморфізмами між підходящими просторами Хермандера. Регулярність функцій, що утворюють ці простори, характеризується парою числових параметрів і функціональним параметром, повільно змінними на нескінченності за Караматою. Завдяки цьому функціональному параметру простори Хермандера описують регулярність функцій більш тонко, ніж анізотропні простори Соболева.

1. Вступ.

Сучасна теорія загальних параболічних початково-крайових задач розроблена для класичних шкал функціональних просторів Гельдера–Зігмунда і Соболева [1–7]. Центральний результат цієї теорії – теореми про коректну розв'язність (за Адамаром) цих задач у підходящих парах вказаних просторів. З точки зору застосувань, зокрема в спектральній теорії диференціальних операторів, особливе місце належить гільбертовим просторам Соболева.

Л.Хермандером [8] було запропоноване широке і змістовне узагальнення просторів Соболева в категорії гільбертових просторів. Ним було введено простори

$$\mathcal{B}_{2,\mu} := \{w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k) : \mu(\xi)\widehat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^k, d\xi)\},$$

для яких показником регулярності розподілів служить загальна вагова функція $\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow (0, \infty)$. Тут \widehat{w} – перетворення Фур'є розподілу w . Ці простори та їх різні версії у категорії нормованих просторів (їх називають просторами узагальненої гладкості) знайшли різноманітні застосування в аналізі і теорії рівнянь з частинними похідними [8–15].

¹National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute".

²Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine.

Так, недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [14–20] побудували теорію розв’язності загальних еліптичних систем і еліптичних крайових задач у гільбертових шкалах просторів $H^{s,\varphi} := \mathcal{B}_{2,\mu}$, для яких показником регулярності є функція вигляду

$$\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2}).$$

Тут числовий параметр s дійсний, а функціональний параметр φ повільно змінний на нескінченності за Й. Карамата [21]. В основі цієї теорії лежить метод інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів, зокрема соболевських. Він дозволяє вивести теореми про властивості еліптичних операторів з відповідних теорем соболевської теорії цих операторів.

Метод інтерполяції просторів виявився дуже корисним і в теорії параболічних диференціальних рівнянь. Інтерполяція з числовим (степеневим) параметром була систематично застосована Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом [3] при побудові теорії розв’язності параболічних початково-крайових задач у повних шкалах анізотропних просторів Соболева. В роботах [22–27] О.О. Мурача і автора цієї статті за допомогою метода інтерполяції з функціональним параметром досліджено параболічні задачі у $2b$ -анізотропних просторах Хермандера $H^{s,s/(2b),\varphi}$, де $2b$ — параболічна вага рівняння, а параметри s і φ є такі самі як і в згаданій еліптичній теорії.

Зокрема, у статтях [22, 23] доведено теореми про коректну розв’язність і локальну регулярність розв’язків початково-крайової задачі для довільного лінійного $2b$ -параболічного рівняння, заданого у двовимірній обмеженій прямокутній області у випадку однорідних початкових умов (даних Коші). Для параболічних рівнянь і систем, заданих у багатовимірному обмеженому циліндрі, подібні результати анонсовано у [24, 25].

У загальній ситуації, коли початкові умови неоднорідні, виникають додаткові труднощі при застосуванні методу інтерполяції, пов’язані з необхідністю враховувати досить складні умови узгодження, що накладаються на праві частини задачі. У статті [26] ці труднощі подолано у модельному випадку двовимірного рівняння теплопровідності з крайовими умовами Діріхле або Неймана. Було доведено теорему про коректну розв’язність відповідної початково-крайової задачі у підходящих парах гільбертових анізотропних просторів Хермандера.

Мета даної роботи — поширити результати статті [26] на випадок загального багатовимірного лінійного параболічного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

2. Постановка задачі. Простори Хермандера. Нехай довільно задані ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежена область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо $\Omega := G \times (0, \tau)$ — циліндр в \mathbb{R}^{n+1} , $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тоді $\bar{\Omega} := \bar{G} \times [0, \tau]$ і $\bar{S} := \Gamma \times [0, \tau]$ є замикання Ω і S відповідно.

Для параболічного рівняння другого порядку, заданого в Ω , розглянемо початково-крайові задачі Діріхле і Неймана:

$$Au \equiv \partial_t u(x, t) + \sum_{|\alpha| \leq 2} a^\alpha(x, t) D_x^\alpha u(x, t) = f(x, t) \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = h(x) \quad \text{при } x \in G, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_S = g(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, 0 < t < \tau, \quad (3)$$

або

$$\partial_\nu u(x, t)|_S = g(x, t) \quad \text{при } x \in \Gamma, 0 < t < \tau. \quad (4)$$

Всі коефіцієнти диференціального виразу A вважаємо нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, тобто $a^\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Використовуємо наступні позначення для частинних похідних $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_k := i \partial / \partial x_k$, $\partial_t := \partial / \partial t$, $\partial_\nu := \partial / \partial \nu$. Тут $x = (x_1, \dots, x_n)$ є довільною точкою простору \mathbb{R}^n , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ є мультиіндексом і $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, ν є орт внутрішньої нормалі до поверхні S . Підсумовування у (1) здійснюється за цілими індексом $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$, що задовольняють умови, зазначені під знаком суми.

Припускаємо [1, § 9, п. 1], що рівняння (1) є параболічним за Петровським у замкнутому циліндрі $\overline{\Omega}$, тобто виконується така умова: для довільних $x \in \overline{G}$, $t \in [0, \tau]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ та $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq 0$, правильно

$$p + \sum_{|\alpha|=2} a^\alpha(x, t) \xi^\alpha \neq 0 \quad \text{за умови} \quad |\xi| + |p| \neq 0.$$

Задачі (1), (2), (3) та (1), (2), (4) будемо досліджувати у шкалах гільбертових функціональних просторів $H^\mu := \mathcal{B}_{2, \mu}$, що були введені Л. Хермандером у [8, п. 2.2]. Згодом ці простори дослідили також та Л. Р. Волевич і Б. П. Панеях [28, § 2, 3]. Показником регулярності функцій (або розподілів), що утворюють простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$, де ціле $k \geq 1$, є вимір за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow (0, \infty)$, яка задовольняє таку умову: існують додатні числа c та l такі, що

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c (1 + |\xi - \eta|)^l \quad \text{для довільних} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^k.$$

За означенням, комплексний лінійний простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, перетворення Фур'є \widehat{w} яких є локально інтегровними за Лебегом функціями, що задовольняють умову

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi) |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

(У роботі усі функції та розподіли вважаються комплекснозначними.) У просторі $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(w_1, w_2)_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} = \int_{\mathbb{R}^k} \mu^2(\xi) \widehat{w}_1(\xi) \overline{\widehat{w}_2(\xi)} d\xi,$$

де $w_1, w_2 \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$. Цей скалярний добуток породжує норму

$$\|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} := (w, w)_{H^\mu(\mathbb{R}^k)}^{1/2}.$$

Простір $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ є гільбертовим і сепарабельним відносно введеного у ньому скалярного добутку. Цей простір є неперервно вкладеним у $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$, а множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ є щільною в ньому [8, п. 2.2].

Нам знадобиться версія простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ для довільної відкритої множини $V \neq \emptyset$. Лінійний простір $H^\mu(V)$ складається, за означенням, із звужень $u = w \upharpoonright V$ всіх розподілів $w \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на множину V . У цьому просторі задана норма за формулою

$$\|u\|_{H^\mu(V)} := \inf \{ \|w\|_{H^\mu(\mathbb{R}^k)} : w \in H^\mu(\mathbb{R}^k), u = w \upharpoonright V \}. \quad (5)$$

Іншими словами, $H^\mu(V)$ є фактор-простором простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ за його підпростором

$$H_Q^\mu(\mathbb{R}^k) := \{w \in H^\mu(\mathbb{R}^k) : \text{supp } w \subseteq Q := \mathbb{R}^k \setminus V\}. \quad (6)$$

Тому простір $H^\mu(V)$ є гільбертовим і сепарабельним. Норма (5) породжена скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^\mu(V)} := (w_1 - \Upsilon w_1, w_2 - \Upsilon w_2)_{H^\mu(\mathbb{R}^k)},$$

де $w_j \in H^\mu(\mathbb{R}^k)$, $w_j = u_j$ у V для кожного $j \in \{1, 2\}$. Тут Υ є ортогональним проектором простору $H^\mu(\mathbb{R}^k)$ на його підпростір (6). У просторі $H^\mu(V)$ щільна множина

$$C_0^\infty(\overline{V}) := \{w \upharpoonright_{\overline{V}} : w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)\}.$$

Для зручності позначень приймемо $\gamma := 1/2$. Надалі будемо використовувати показники регулярності вигляду

$$\mu_{s,\varphi}(\xi', \xi_k) := \mu(\xi', \xi_k) := (1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{s/2} \varphi((1 + |\xi'|^2 + |\xi_k|^{2\gamma})^{1/2}), \quad (7)$$

де $\xi' \in \mathbb{R}^{k-1}$ та $\xi_k \in \mathbb{R}$ є аргументами функції μ . Тут числовий параметр s є дійсним, а функціональний параметр φ пробігає клас \mathcal{M} .

За означенням, клас \mathcal{M} складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, які задовольняють такі дві умови:

а) обидві функції φ та $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, b]$, де $1 < b < \infty$;

б) функція φ повільно змінюється за Й. Карамата на нескінченності, а саме, $\varphi(\lambda r)/\varphi(r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ для кожного $\lambda > 0$.

Теорія повільно змінних функцій (на нескінченності) викладена, наприклад, у монографії [21]. Їх важливим прикладом є функції вигляду

$$\varphi(r) := (\log r)^{\theta_1} (\log \log r)^{\theta_2} \dots (\underbrace{\log \dots \log r}_{k \text{ разів}})^{\theta_k} \quad \text{при } r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ та $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k \in \mathbb{R}$ є довільними.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Розв'язки u початково-крайових задач (1), (2), (3) і (1), (2), (4) та праві частини f рівняння (1) будемо розглядати у анізотропних гільбертових функціональних просторах Хермандера $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) := H^\mu(\Omega)$ де показник μ визначений формулою (7), у якій $k := n + 1$.

Якщо $\varphi(r) \equiv 1$, то $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ стає анізотропним гільбертовим простором Соболева порядку $(s, s\gamma)$; позначимо його через $H^{s,s\gamma}(\Omega)$. Тут s — показник регулярності розподілу $u = u(x, t)$ по просторовій змінній $x \in \Omega$, а $s\gamma$ — показник регулярності по часовій змінній $t \in (0, \tau)$. В загальному випадку, коли $\varphi \in \mathcal{M}$ є довільною, правильні неперервні і щільні вкладки

$$H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega) \quad \text{при } s_0 < s < s_1. \quad (8)$$

Справді, оскільки функція $\varphi \in \mathcal{M}$, то існують додатні числа c_0 і c_1 такі, що

$$c_0 r^{s_0-s} \leq \varphi(r) \leq c_1 r^{s_1-s} \quad \text{для довільного } r \geq 1$$

(див., наприклад, [21, п.1.5, 1⁰]). Тоді

$$c_0 \mu_{s_0,1}(\xi', \xi_{n+1}) \leq \mu_{s,\varphi}(\xi', \xi_{n+1}) \leq c_1 \mu_{s_1,1}(\xi', \xi_{n+1})$$

для довільних $\xi' \in \mathbb{R}^n$ та $\xi_{n+1} \in \mathbb{R}$. Звідси зразу випливають неперервні вкладення просторів (8). Ці вкладення щільні, оскільки множина $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в усіх цих просторах.

Розглянемо клас гільбертових функціональних просторів

$$\{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}. \quad (9)$$

Вкладання (8) показують, що у (9) функціональний параметр φ визначає додаткову гладкість по відношенню до основної анізотропної $(s, s\gamma)$ -гладкості. Якщо $\varphi(r) \rightarrow \infty$ (або $\varphi(r) \rightarrow 0$) при $r \rightarrow \infty$, то φ визначає позитивну (або негативну) додаткову гладкість. Інакше кажучи, φ уточнює основну гладкість $(s, s\gamma)$. Тут $\gamma := 1/2$ виконує роль параметра анізотропії просторів, що утворюють цю шкалу.

Клас (9) називаємо 2-анізотропною шкалою гільбертових просторів Хермандера на Ω .

Нам знадобляться також анізотропні простори Хермандера, задані на бічній поверхні $S = \Gamma \times (0, \tau)$ циліндра Ω . До них будуть належати праві частини g крайових умов (3) і (4). Означимо ці простори використовуючи спеціальні локальні карти на S (див. [27, п.1]).

Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Попередньо для відкритої смуги $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau)$ розглянемо гільбертові простори $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi) := H^\mu(\Pi)$, де показник μ визначений формулою (7), у якій $k := n$. Довільно виберемо скінченний атлас із C^∞ -структури на замкненому многовиді Γ . Нехай цей атлас утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \dots, \lambda$. Тут відкрити множини $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ . Окрім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \dots, \lambda$, такі, що $\text{supp } \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^\lambda \chi_j \equiv 1$ на Γ .

За означенням, лінійний простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ на многовиді S таких, що для кожного номеру $j \in \{1, \dots, \lambda\}$ функція

$$v_j(x, t) := \chi_j(\theta_j(x)) v(\theta_j(x), t)$$

аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0, \tau)$ належить до $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)$. У просторі $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(v, g)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := \sum_{j=1}^\lambda (v_j, g_j)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(\Pi)},$$

де $v, g \in H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$. Він породжує норму

$$\|v\|_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)} := (v, v)_{H^{s,s\gamma,\varphi}(S)}^{1/2}.$$

Відмітимо, що простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ означений за допомогою спеціальних локальних карт на S

$$\theta_j^* : \Pi = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \tau) \leftrightarrow \Gamma_j \times (0, \tau) \quad \text{для кожного } j \in \{1, \dots, \lambda\},$$

де покладемо $\theta_j^*(x, t) := (\theta_j(x), t)$ для усіх $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in (0, \tau)$. Цей простір є повним (гільбертовим) та не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [27, теорема 1].

Нам також знадобляться ізотропні простори Хермандера $H^{s,\varphi}(V)$, де $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, а V — довільна відкрита непорожня множина. За означенням, $H^{s,\varphi}(V)$ є гільбертів простір $H^\mu(V)$, де

$$\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2}). \quad (10)$$

Тут $\xi \in \mathbb{R}^k$ є аргументом функції μ . Оскільки функція μ є радіальною (залежить лише від $|\xi|$), то простір $H^{s,\varphi}(V)$ є ізотропним. Ми будемо використовувати простори $H^{s,\varphi}(V)$ у випадках $V = \mathbb{R}^k$ і $V = G$. До просторів $H^{s,\varphi}(G)$ буде належати права частина h початкової умови (2).

Окрім того, як допоміжні, нам будуть потрібні простори $H^{s,\varphi}(\Gamma)$. Подібно до просторів на S , означимо їх за допомогою локальних карт θ_j , $j = 1, \dots, \lambda$, вказаних вище. Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. За означенням, лінійний простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ на многовиді Γ таких, що для кожного номеру $j \in \{1, \dots, \lambda\}$ розподіл $w_j(x) := \chi_j(\theta_j(x)) w(\theta_j(x))$ аргумента $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ належить до $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. У просторі $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ означений скалярний добуток за формулою

$$(w, g)_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\lambda} (w_j, g_j)_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $w, g \in H^{s,\varphi}(\Gamma)$. Він породжує норму

$$\|w\|_{H^{s,\varphi}(\Gamma)} := (w, w)_{H^{s,\varphi}(\Gamma)}^{1/2}.$$

Простір $H^{s,\varphi}(\Gamma)$ є гільбертовим та не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору локальних карт і розбиття одиниці на Γ [14, теорема 2.3].

Ізотропні простори $H^{s,\varphi}$ виділили і систематично використовували В. А. Михайлець та О. О. Мурач у теорії еліптичних крайових задач [14, 15].

Якщо $\varphi \equiv 1$, то означені вище простори стають соболевськими просторами (анізотропними або ізотропними). У цьому випадку будемо опускати індекс φ у позначеннях просторів.

3. Основні результати. Розглянемо спочатку задачу (1), (2), (3), яка відповідає крайовій умові Діріхле. Для того, щоб існував достатньо регулярний розв'язок u цієї задачі, її праві частини повинні задовольняти деякі умови узгодження (див. [1, §11] або [29, §6]). Розглянемо ці умови, спираючись на соболевську теорію параболічних задач ($\varphi \equiv 1$).

Пов'яжемо із задачею (1), (2), (3) лінійне відображення

$$\Lambda_D : u \mapsto (Au, u|_{\overline{S}}, u(\cdot, 0)), \quad \text{де } u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \quad (11)$$

Нехай $s > 2$. Відображення (11) однозначно продовжується (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\Lambda_D : H^{s,s/2}(\Omega) \rightarrow H^{s-2,(s-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s-1/2,s/2-1/4}(S) \oplus H^{s-1}(G).$$

Це означає, що для кожної функції $u = u(x, t)$ з соболевського простору $H^{s,s/2}(\Omega)$ означені праві частини задачі

$$f \in H^{s-2,(s-2)/2}(\Omega), \quad g \in H^{s-1/2,s/2-1/4}(S) \quad \text{і} \quad h \in H^{s-1}(G).$$

Умови узгодження на функції f , g і h природно виникають так. Для функції u означені сліди $\partial_t^k u(\cdot, 0) \in H^{s-1-2k}(G)$ для всіх цілих k , таких, що $0 \leq k < (s-1)/2$, і лише таких цілих k . Ці сліди виражаються з рівняння (1) і початкової умови (2) через функції f і h за рекурентними формулами:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= h(x), \\ \partial_t^k u(x, 0) &= - \sum_{|\alpha| \leq 2} a^\alpha(x, 0) D_x^\alpha \partial_t^{k-1} u(x, 0) + \partial_t^{k-1} f(x, 0); \end{aligned} \quad (12)$$

тут $x \in G$ – довільне, а цілі k , такі, що $0 \leq k < (s-1)/2$.

Окрім того, сліди $\partial_t^k g(\cdot, 0) \in H^{s-3/2-2k}(\Gamma)$ означені для усіх цілих чисел k , таких, що $0 \leq k < (s-3/2)/2$, і лише для цих цілих k . Тому, згідно з крайовою умовою (3), виконується рівність

$$\partial_t^k u(\cdot, 0) = \partial_t^k g(\cdot, 0) \quad (13)$$

на Γ для усіх цих k .

Тепер підставивши (12) у (13) дістаємо умови узгодження

$$\partial_t^k g \upharpoonright \Gamma = v_k \upharpoonright \Gamma \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{Z} \text{ таких, що } 0 \leq k < (s-3/2)/2. \quad (14)$$

Тут функції $v_k = v_k(\cdot, f, h)$ означені за рекурентними формулами

$$\begin{aligned} v_0(x) &= h(x), \\ v_k(x) &= - \sum_{|\alpha| \leq 2} a^\alpha(x, 0) D_x^\alpha v_{k-1}(x) + \partial_t^{k-1} f(x, 0), \end{aligned} \quad (15)$$

де $x \in G$ довільне, а цілі k , такі, що $0 \leq k < (s-3/2)/2$.

Наприклад, якщо $2 < s \leq 7/2$, то маємо одну умову узгодження $g \upharpoonright \Gamma = h \upharpoonright \Gamma$. Для наступного проміжку $7/2 < s \leq 11/2$ будуть вже дві умови $g \upharpoonright \Gamma = h \upharpoonright \Gamma$ і

$$\partial_t g \upharpoonright \Gamma = \left(- \sum_{|\alpha| \leq 2} a^\alpha(x, 0) D_x^\alpha h(x) + f(x, 0) \right) \upharpoonright \Gamma.$$

І так далі.

Тепер сформулюємо основний результат для задачі (1), (2), (3). Це теорема про її коректну розв'язність у підходящих парах просторів Хермандера, введених у п. 2.

Попередньо для довільних параметрів $s > 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ введемо гільбертів простір $\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$. Позначимо

$$\mathcal{H}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi} := H^{s-2, (s-2)/2, \varphi}(\Omega) \oplus H^{s-1/2, s/2-1/4, \varphi}(S) \oplus H^{s-1, \varphi}(G).$$

Якщо $s \notin \{2r + 3/2 : r \in \mathbb{N}\}$, то, за означенням, лінійний простір $\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$ складається з усіх векторів $(f, g, h) \in \mathcal{H}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$, які задовольняють умови узгодження (14). Цей лінійний простір наділяється скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$. Простір $\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$ є повним, тобто гільбертовим.

Цей факт відомий у соболевському випадку $\varphi \equiv 1$ і є наслідком обмеженості у відповідних анізотропних соболевських просторах диференціальних і крайових операторів, що фігурують у формулах (14) і (15). У загальній ситуації, коли $\varphi \in \mathcal{M}$, повнота простору $\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$ є наслідком рівності

$$\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi} = \mathcal{H}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi} \cap \mathcal{Q}_D^{s-2-\varepsilon, (s-2-\varepsilon)/2}.$$

Тут число $\varepsilon > 0$ настільки мале, що елементи просторів

$$\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi} \quad \text{і} \quad \mathcal{Q}_D^{s-2-\varepsilon, (s-2-\varepsilon)/2}$$

задовольняють одні і ті самі умови узгодження (14). Права частина цієї рівності є гільбертовим простором відносно скалярного добутку, що є сумою скалярних добутків у гільбертових просторах — компонентах перетину. Окрім того, норми у просторах, з'єднаних знаком рівності, еквівалентні на підставі неперервного вкладення

$$\mathcal{H}_D^{s-2,(s-2)/2,\varphi} \hookrightarrow \mathcal{H}_D^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2},$$

яке є наслідком формули (8). Тому є повним і простір у лівій частині цієї рівності. З останнього вкладення випливає також, що умови узгодження (14) коректно поставлені для довільного вектора $(f, g, h) \in \mathcal{H}_D^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, оскільки вони є коректними, якщо цей вектор лежить у ширшому анізотропному соболевському просторі $\mathcal{H}_D^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2}$.

Якщо $s \in \{2r+3/2 : r \in \mathbb{N}\}$, то означаємо гільбертів простір $\mathcal{Q}_D^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ за допомогою інтерполяції

$$\mathcal{Q}_D^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := [\mathcal{Q}_D^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2,\varphi}, \mathcal{Q}_D^{s-2+\varepsilon,(s-2+\varepsilon)/2,\varphi}]_{1/2}. \quad (16)$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції зазначеної пари гільбертових просторів з числовим параметром $1/2$ (див. п. 4). Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε (див. зауваження у кінці п. 5).

Теорема 1. *Нехай довільно задані параметри: числовий $s > 2$ і функціональний $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді відображення (11) однозначно продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_D : H^{s,s/2,\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_D^{s-2,(s-2)/2,\varphi}. \quad (17)$$

Перейдемо до розгляду задачі (1), (2), (4), яка відповідає крайовій умові Неймана. Тепер, на відміну від попередньої задачі Діріхле, властивість $u \in H^{s,s/2}(\Omega)$ тягне за собою включення, $g \in H^{s-3/2,s/2-3/4}(S)$. Тому сліди $\partial_t^k g(\cdot, 0) \in H^{s-5/2-2k}(\Gamma)$ означені для усіх цілих чисел k , таких, що $0 \leq k < (s-5/2)/2$, і лише цих цілих k .

Для цієї задачі умови узгодження правих частин набувають вигляду

$$\partial_t^k g|_{\Gamma} = (\partial_\nu v_k)|_{\Gamma} \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{Z} \text{ таких, що } 0 \leq k < (s-5/2)/2. \quad (18)$$

Тут функції $v_k = v_k(\cdot, f, h)$ означені за рекурентними формулами (15), де $x \in G$ довільне, а цілі k , такі, що $0 \leq k < (s-5/2)/2$.

Подібно до попередньої задачі для всіх $s > 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ введемо гільбертів простір $\mathcal{Q}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$. Позначимо

$$\mathcal{H}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := H^{s-2,(s-2)/2,\varphi}(\Omega) \oplus H^{s-3/2,s/2-3/4,\varphi}(S) \oplus H^{s-1,\varphi}(G).$$

Якщо $s \notin \{2r+1/2 : r \in \mathbb{N}\}$, то, за означенням, лінійний простір $\mathcal{Q}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ складається з усіх векторів $(f, g, h) \in \mathcal{H}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, які задовольняють умови узгодження (18). Цей лінійний простір наділяється скалярним добутком і нормою з гільбертового простору $\mathcal{H}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$. Простір $\mathcal{Q}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ є повним, тобто (гільбертовим). Це обґрунтовується аналогічно до міркувань про повноту простору $\mathcal{H}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$.

Якщо $s \in \{2r+1/2 : r \in \mathbb{N}\}$, то означаємо простір $\mathcal{Q}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ за допомогою інтерполяції

$$\mathcal{Q}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := [\mathcal{Q}_N^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2,\varphi}, \mathcal{Q}_N^{s-2+\varepsilon,(s-2+\varepsilon)/2,\varphi}]_{1/2}; \quad (19)$$

тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно. Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε (див. зауваження у кінці п. 5).

Тепер сформулюємо основний результат для задачі (1), (2), (4). Пов'яжемо з нею лінійне відображення

$$\Lambda_N : u \mapsto (Au, \partial_\nu u|_{\overline{\Omega}}, u(\cdot, 0)), \quad \text{де } u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \quad (20)$$

Теорема 2. *Нехай довільно задані параметри: числовий $s > 2$ і функціональний $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді відображення (20) однозначно продовжується (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_N : H^{s, s/2, \varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi}. \quad (21)$$

Відмітимо, що при $s \in (2; 5/2)$ умови узгодження в задачі Неймана відсутні та простори $\mathcal{Q}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$ і $\mathcal{H}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$ рівні.

У соболевському випадку, коли $\varphi \equiv 1$ і $s \notin \{k+1/2, 2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$ ці теореми містяться у результатах Аграновіча–Вішика [1, теорема 12.1] (для цілих s) і Ліонса–Мадженеса [3, теорема 6.2] (для дробових s). У статті Солоннікова [29, теорема 17] для розглянутих задач доведені лише апріорні оцінки їх розв'язків.

4. Інтерполяція з функціональним параметром. Нагадаємо означення інтерполяції з функціональним параметром у випадку загальних гільбертових просторів та обговоримо інтерполяційні властивості, які будуть використані у наступному розділі. Ми слідуємо монографії [14, п. 1.1] (див. також [20, п. 2]). Обмежимося розглядом випадку сепарабельних комплексних гільбертових просторів.

Нехай $X := [X_0, X_1]$ є впорядкованою парою сепарабельних комплексних гільбертових просторів для яких має місце неперервне і щільне вкладання $X_1 \hookrightarrow X_0$. Таку пару називають допустимою. Для неї існує оператор J , такий, що він є самоспряженим додатньо визначеним оператором в X_0 з областю визначення X_1 , причому $\|Ju\|_{X_0} = \|u\|_{X_1}$. Оператор J визначається парою X однозначно і називається породжуючим оператором для X .

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. Тут через \mathcal{B} позначено множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, для яких ψ є обмеженою на кожному відрізку $[a, b]$, де $0 < a < b < \infty$, і $1/\psi$ є обмеженою на кожному промені $[a, \infty)$, де $a > 0$.

Розглянемо оператор $\psi(J)$, він є додатньо визначеним оператором в X_0 як борелевська функція ψ від J . Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$, або скорочено X_ψ , область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{X_\psi} := (\psi(J)u_1, \psi(J)u_2)_{X_0}.$$

Він породжує норму $\|u\|_{X_\psi} := \|\psi(J)u\|_{X_0}$. Простір X_ψ є сепарабельним гільбертовим.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ назвемо інтерполяційним параметром, якщо для всіх допустимих пар $X = [X_0, X_1]$ та $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T , заданого на X_0 вірно таке: якщо звуження відображення T на X_j є обмеженим оператором $T : X_j \rightarrow Y_j$ для кожного $j \in \{0, 1\}$, тоді звуження відображення T на X_ψ є також обмеженим оператором $T : X_\psi \rightarrow Y_\psi$.

Якщо ψ є інтерполяційним параметром, тоді будемо казати, що гільбертів простір X_ψ отримано в результаті інтерполяції з функціональним параметром ψ пари $X = [X_0, X_1]$. В цьому випадку маємо щільні та неперервні вкладання $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Відомо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді коли ψ є псевдоугнutoю в околі ∞ , тобто коли існує угнута додатна функція $\psi_1(r)$ при $r \gg 1$ така, що обидві функції ψ/ψ_1 та ψ_1/ψ є обмеженими в деякому околі ∞ . Цей критерій впливає з опису Ж. Петре класу всіх інтерполяційних функцій для вагових просторів типу $L_p(\mathbb{R}^n)$ (див. [30, Теорема 5.4.4]). Доведення цього критерію наведено, наприклад, в [14, п. 1.1.9].

Для нас важливим є такий наслідок з цього критерію [14, Теорема 1.11].

Твердження 1. *Припустимо, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є правильно змінною на нескінченності функцією порядку θ , де $0 < \theta < 1$, тобто*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi(\lambda r)}{\psi(r)} = \lambda^\theta \quad \text{для кожного } \lambda > 0.$$

Тоді ψ є інтерполяційним параметром.

У випадку степеневих функцій це твердження приводить до класичного результату Ж.-Л. Ліонса та С. Г. Крейна, який полягає в тому, що функція $\psi(r) \equiv r^\theta$ є інтерполяційним параметром при $0 < \theta < 1$. Тут показник θ розглядається як числовий параметр інтерполяції (ця інтерполяція була застосована у формулах (16) і (19)).

У кінці цього пункту сформулюємо три властивості інтерполяції, які будуть використані у подальших доведеннях (див. [14, пп. 1.1.3, 1.1.5, 1.1.6] та [31, п. 1.17]). Перша з них дозволяє звести інтерполяцію підпросторів або факторпросторів до інтерполяції вихідних просторів. Зазначимо, що підпростори припускаються замкнені, і розглядаються, взагалі кажучи, не ортогональні проектори на підпростори.

Твердження 2. *Нехай $X = [X_0, X_1]$ є допустимою парою гільбертових просторів, а Y_0 є підпростором в X_0 . Тоді $Y_1 := X_1 \cap Y_0$ є підпростором в X_1 . Припустимо, що існує лінійне відображення $P : X_0 \rightarrow X_0$, яке для кожного $j \in \{0, 1\}$ є проектором простору X_j на його підпростір Y_j . Тоді пари $[Y_0, Y_1]$ та $[X_0/Y_0, X_1/Y_1]$ є допустимими і для довільного інтерполяційного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ правильні рівності*

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_1]_\psi &= X_\psi \cap Y_0, \\ [X_0/Y_0, X_1/Y_1]_\psi &= X_\psi / (X_\psi \cap Y_0) \end{aligned}$$

з еквівалентністю норм. Тут $X_\psi \cap Y_0$ є підпростором у X_ψ .

Друга властивість дозволяє звести інтерполяцію прямих сум гільбертових просторів до інтерполяції їх доданків.

Твердження 3. *Нехай $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$, де $j = 1, \dots, p$, є скінченний набір допустимих пар гільбертових просторів. Тоді*

$$\left[\bigoplus_{j=1}^p X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^p X_1^{(j)} \right]_\psi = \bigoplus_{j=1}^p [X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]_\psi$$

з рівністю норм. Тут функція $\psi \in \mathcal{B}$ є довільним інтерполяційним параметром.

Третя показує, що повторне застосування інтерполяції з функціональним параметром дає знову інтерполяцію з деяким функціональним параметром.

Твердження 4. *Нехай $\alpha, \beta, \psi \in \mathcal{B}$ і функція α/β є обмеженою в околі нескінченності. Тоді для кожної допустимої пари X гільбертових просторів правильна рівність $[X_\alpha, X_\beta]_\psi = X_\omega$ з рівністю норм. Тут функція $\omega \in \mathcal{B}$ визначена за формулою $\omega(t) := \alpha(t)\psi(\beta(t)/\alpha(t))$ при $t > 0$. Більше того, якщо α, β, ψ є інтерполяційними параметрами, то ω також є інтерполяційним параметром.*

5. Доведення результатів. Виявляється, що означені у п. 2 анізотропні $H^{s,s\gamma,\varphi}$ та ізотропні $H^{s,\varphi}$ простори Хермандера можна одержати в результаті інтерполяції з підходящим функціональним параметром відповідних пар гільбертових просторів Соболева. Ми сформулюємо ці інтерполяційні властивості і доведемо одну з них для анізотропних просторів в циліндрі Ω (решту було встановлено в інших роботах). Потім, скориставшись цими властивостями, введемо теореми 1 і 2 з вищезгаданого результату Ліонса–Мадженеса.

Нехай дійсні числа s_0 , s і s_1 такі, що $s_0 < s < s_1$, а функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Розглянемо функцію

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)} \varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для } r \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{для } 0 < r < 1. \end{cases} \quad (22)$$

За твердженням 1, ця функція є інтерполяційним параметром, оскільки вона є правильною змінною функцією на нескінченності порядку $\theta := (s - s_0)/(s_1 - s_0)$ з $0 < \theta < 1$. Надалі будемо інтерполювати пари соболевських просторів з функціональним параметром ψ .

Інтерполяція ізотропних соболевських просторів досліджена в роботах В. А. Михайлеца та О.О. Мурача [14, 15]. Нам знадобляться такі рівності [14, теореми 1.14, 2.2, 3.2]:

$$H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^k) = [H^{s_0}(\mathbb{R}^k), H^{s_1}(\mathbb{R}^k)]_{\psi}, \quad (23)$$

$$H^{s,\varphi}(G) = [H^{s_0}(G), H^{s_1}(G)]_{\psi}, \quad (24)$$

$$H^{s,\varphi}(\Gamma) = [H^{s_0}(\Gamma), H^{s_1}(\Gamma)]_{\psi}, \quad (25)$$

що мають місце з точністю до еквівалентності норм. Тут $k \in \mathbb{N}$, $s_0 < s < s_1$, $\varphi \in \mathcal{M}$, інтерполяційний параметр ψ заданий формулою (22).

Для просторів $H^{s,s\gamma,\varphi}(S)$ також правильна рівність [27, теорема 2]:

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(S) = [H^{s_0,s_0\gamma}(S), H^{s_1,s_1\gamma}(S)]_{\psi}, \quad (26)$$

з точністю до еквівалентності норм. Тут $0 \leq s_0 < s < s_1$, $\varphi \in \mathcal{M}$, $\gamma = 1/2$, інтерполяційний параметр ψ заданий формулою (22).

Встановимо версію цих формул для простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$.

Лема 1. *Нехай $\gamma = 1/2$, дійсні числа s_0 , s і s_1 такі, що $0 \leq s_0 < s < s_1$, функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$, а ψ – інтерполяційний параметр, заданий формулою (22). Тоді правильна така інтерполяційна формула*

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega) = [H^{s_0,s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1,s_1\gamma}(\Omega)]_{\psi}, \quad (27)$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Доведення формули (27) спирається на твердження 2 у частині інтерполяції факторпросторів і на інтерполяційну формулу (див. [27, Лема 1])

$$H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k) = [H^{s_0,s_0\gamma}(\mathbb{R}^k), H^{s_1,s_1\gamma}(\mathbb{R}^k)]_{\psi}, \quad (28)$$

яка виконується з рівністю норм. Тут $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^k) := H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$, де показник μ визначений формулою (7).

Як зазначалося у п. 2, простір $H^{s,s\gamma,\varphi}(\Omega)$ є факторпростором простору $H^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ за його підпростором $H_Q^{s,s\gamma,\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$ (6). Для виведення (27) з (28) побудуємо проектор P кожного простору $H^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, із $j \in \{0, 1\}$, на його підпростір $H_Q^{s_j,s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Як відомо [32, п. 9.6], існує лінійний обмежений оператор продовження $T_\Omega : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^{n+1})$ такий, що звуження T на кожний простір $H^{\sigma, \sigma\gamma}(\Omega)$, де σ і $\sigma\gamma$ натуральні числа, є обмеженим оператором $T_\Omega : H^{\sigma, \sigma\gamma}(\Omega) \rightarrow H^{\sigma, \sigma\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$. Виходячи з цього припустимо додатково, що всі $s_0, s_1, s_0\gamma$, та $s_1\gamma$ є цілими невід'ємними числами. Розглянемо відображення $P : w \mapsto w - T_\Omega(w|_\Omega)$, де $w \in H^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$. Оператор P є проектором. Справді, P є лінійним обмеженим оператором на $H^{s_j, s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ для кожного $j \in \{0, 1\}$. Більш того, якщо $w = 0$ в Ω , то $T_\Omega(w|_\Omega) = 0$ в \mathbb{R}^{n+1} ; тому $Pw = w$ для кожної $w \in H_Q^{s_j, s_j\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Оскільки проектор P заданий, можемо використати твердження 2 та формулу (28) з $k := n + 1$ і записати

$$\begin{aligned} & [H^{s_0, s_0\gamma}(\Omega), H^{s_1, s_1\gamma}(\Omega)]_\psi \\ &= [H^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})/H_Q^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), H^{s_1, s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})/H_Q^{s_1, s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})]_\psi \\ &= [H^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), H^{s_1, s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})]_\psi / ([H^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), H^{s_1, s_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})]_\psi \cap H_Q^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})) \\ &= H^{s, s\gamma, \varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) / (H^{s, s\gamma, \varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) \cap H_Q^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})) = H^{s, s\gamma, \varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) / H_Q^{s, s\gamma, \varphi}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ &= H^{s, s\gamma, \varphi}(\Omega) \end{aligned}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Формулу (27) встановлено у додатковому припущенні, що всі $s_0, s_1, s_0\gamma$, та $s_1\gamma$ є цілими невід'ємними числами. Це припущення можна прибрати, оскільки звуження оператора T_Ω на кожний простір $H^{\sigma, \sigma\gamma}(\Omega)$, де дійсне $\sigma \geq 0$, є обмеженим оператором

$$T_\Omega : H^{\sigma, \sigma\gamma}(\Omega) \rightarrow H^{\sigma, \sigma\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}). \quad (29)$$

Доведемо обмеженість оператора (29) за допомогою інтерполяції. Нехай число $k_1 \in \mathbb{N}$ таке, що $k_1 > \sigma$ і $k_1\gamma \in \mathbb{N}$. Розглянемо обмежені оператори

$$T_\Omega : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \quad \text{і} \quad T_\Omega : H^{k_1, k_1\gamma}(\Omega) \rightarrow H^{k_1, k_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Оскільки ψ є інтерполяційним параметром, то з обмеженості останніх двох операторів випливає обмеженість оператора

$$T_\Omega : [L_2(\Omega), H^{k_1, k_1\gamma}(\Omega)]_\psi \rightarrow [L_2(\mathbb{R}^{n+1}), H^{k_1, k_1\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})]_\psi. \quad (30)$$

Тепер обмеженість оператора (29) є прямим наслідком обмеженості оператора (30) та інтерполяційних рівностей (28) і (27) при $\varphi = 1$, $s_0 = 0$, $s = \sigma$, $s_1 = k_1$, $k = n + 1$.

Для завершення доведення формули (27) достатньо повторити частину її доведення починаючи з побудови проектора P , скориставшись при цьому оператором продовження (29).

Лема 1 доведена.

Щоб довести основні результати роботи залишилось встановити інтерполяційні формули для просторів $\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$ і $\mathcal{Q}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$, до яких належать праві частини розглядуваних задач. Для цього нам будуть потрібні такі дві леми про властивості оператора даних Коші в анізотропних просторах Хермандера.

Лема 2. Нехай $\gamma = 1/2$ і задане довільне $r \in \mathbb{N}$. Для довільних дійсного числа $s > 2r - 1$ і функції $\varphi \in \mathcal{M}$ лінійні відображення

$$w \mapsto (w|_{t=0}, (\partial_t w)|_{t=0}, \dots, (\partial_t^{r-1} w)|_{t=0}), \quad \text{де} \quad w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (31)$$

та

$$g \mapsto (g \upharpoonright \Gamma, (\partial_t g) \upharpoonright \Gamma, \dots, (\partial_t^{r-1} g) \upharpoonright \Gamma), \quad \text{де } g \in C^\infty(\overline{S}) \quad (32)$$

продовжуються по неперервності до обмежених операторів

$$R_{\mathbb{R}^{n-1}} : H^{s, s\gamma, \varphi}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad (33)$$

та

$$R_\Gamma : H^{s, s\gamma, \varphi}(S) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\Gamma) \quad (34)$$

відповідно.

Доведення. У випадку $\varphi \equiv 1$ (простори Соболева) твердження леми є відомим [33, п.ІІ, теореми 6, 7] (див. також [5, теорема 2.4]). Звідси загальний випадок $\varphi \in \mathcal{M}$ виведемо за допомогою інтерполяції. Зробимо це для відображення (31). Виберемо s_0 і s_1 так, щоб $2r - 1 < s_0 < s < s_1$. Маємо лінійні обмежені оператори

$$R_{\mathbb{R}^{n-1}} : H^{s_j, s_j\gamma}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s_j-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \text{для всіх } j \in \{0, 1\}.$$

Застосувавши тут інтерполяцію з функціональним параметром ψ , ми отримаємо обмежений оператор

$$R_{\mathbb{R}^{n-1}} : [H^{s_0, s_0\gamma}(\mathbb{R}^n), H^{s_1, s_1\gamma}(\mathbb{R}^n)]_\psi \rightarrow \left[\bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s_0-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1}), \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s_1-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \right]_\psi. \quad (35)$$

Оператор (35) є розширенням за неперервністю відображення (31) оскільки множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ щільна в області визначення оператора (35). З обмеженості оператора (35), твердження 3 та рівностей (23) і (28) впливає обмеженість оператора (33).

Для відображення (32) доведення проводиться за тією ж схемою з використанням інтерполяційних формул (25) і (26).

Лема 2 доведена.

Лема 3. Нехай задано довільне $r \in \mathbb{N}$. Тоді існує лінійне відображення $T : (L_2(\Gamma))^r \rightarrow L_2(S)$ таке, що для довільних дійсного числа $s > 2r - 1$ і функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ звуження відображення T на простір

$$\bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\Gamma)$$

є лінійним обмеженим оператором

$$T : \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\Gamma) \rightarrow H^{s, s/2, \varphi}(S), \quad (36)$$

правим оберненим до оператора (34).

Доведення. Спочатку доведемо цю лему для відповідних гільбертових просторів, заданих на \mathbb{R}^{n-1} та \mathbb{R}^n замість Γ та S . За аналогією з [8] (доведення теореми 2.5.7) розглянемо лінійне відображення

$$T_1 : v \mapsto F_\xi^{-1}(\beta(\langle \xi \rangle^2 t) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \widehat{v}_k(\xi) t^k),$$

задане на вектор-функціях

$$v := (v_0, \dots, v_{r-1}) \in (S'(\mathbb{R}^{n-1}))^r.$$

Тут $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ є деяка функція, що дорівнює 1 в околі нуля, $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ – згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\widehat{w}(\xi) := (Fw)(\xi)$, де $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, є (повне) перетворення Фур'є розподілу $w \in S'(\mathbb{R}^{n-1})$, а F_ξ^{-1} – оператор оберненого перетворення Фур'є по частотній змінній $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$. Звісно, відображення T_1 є лінійним неперервним оператором

$$T_1 : (S'(\mathbb{R}^{n-1}))^r \rightarrow S'(\mathbb{R}^n). \quad (37)$$

Покажемо, що звуження оператора (37) на простір

$$\bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$$

є обмеженим оператором

$$T_1 : \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H^{s, s/2, \varphi}(\mathbb{R}^n), \quad (38)$$

правим оберненим до оператора (33).

Попередньо відмітимо, що

$$R_{\mathbb{R}^{n-1}} T_1 v = v \quad \text{для довільних } v \in (S(\mathbb{R}^{n-1}))^r. \quad (39)$$

Справді, для кожного індекса $j \in \{0, \dots, r-1\}$ і довільної вектор-функції

$$v = (v_0, \dots, v_{r-1}) \in (S(\mathbb{R}^{n-1}))^r$$

виконуються рівності

$$\begin{aligned} (\partial_t^j \widehat{T_1 v})|_{t=0} &= \partial_t^j (\widehat{T_1 v})|_{t=0} = \partial_t^j \left(\beta(\langle \xi \rangle^2 t) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \widehat{v}_k(\xi) t^k \right) |_{t=0} \\ &= \beta(0) \left(\partial_t^j \left(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \widehat{v}_k(\xi) t^k \right) \right) |_{t=0} = \beta(0) j! \frac{1}{j!} \widehat{v}_j(\xi) = \widehat{v}_j(\xi). \end{aligned}$$

Тут враховано, що $\beta = 1$ в околі нуля. Отже, $\widehat{R_{\mathbb{R}^{n-1}} T_1 v} = \widehat{v}$, що рівносильно (39).

Доведемо спочатку обмеженість оператора (38) у соболевському випадку, коли $s = 2m$, де $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, і $\varphi \equiv 1$. Відповідну оцінку встановимо використавши у просторі $H^{2m, m}(\mathbb{R}^n)$ таку еквівалентну норму [32, п.9.1]:

$$\|u\|_{2m, m}^2 := \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\partial_{x_j}^{2m} u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\partial_t^m u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Для довільного $v \in (S(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ запишемо на підставі рівності Парсеваля

$$\begin{aligned}
\|T_1 v\|_{2m,m}^2 &= \|T_1 v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\partial_{x_j}^{2m}(T_1 v)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\partial_t^m(T_1 v)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&= \|\widehat{T_1 v}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \|\xi_j^{2m} \widehat{T_1 v}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\partial_t^m(\widehat{T_1 v})\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \|\beta(\langle \xi \rangle^2 t) \widehat{v}_k(\xi) t^k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \|\xi_j^{2m} \beta(\langle \xi \rangle^2 t) \widehat{v}_k(\xi) t^k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&\quad + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \|\partial_t^m(\beta(\langle \xi \rangle^2 t) \widehat{v}_k(\xi) t^k)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

Оцінимо окремо кожну з останніх трьох норм. Використавши заміну змінних $\tau = \langle \xi \rangle^2 t$, де ξ фіксовано, отримуємо рівності

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^m(\beta(\langle \xi \rangle^2 t) \widehat{v}_k(\xi) t^k)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{v}_k(\xi)|^2 |\partial_t^m(\beta(\langle \xi \rangle^2 t) t^k)|^2 d\xi dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{v}_k(\xi)|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}} |\partial_t^m(\beta(\langle \xi \rangle^2 t) t^k)|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{v}_k(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{4m-4k-2} d\xi \int_{\mathbb{R}} |\partial_\tau^m(\beta(\tau) \tau^k)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Тобто

$$\|\partial_t^m(\beta(\langle \xi \rangle^2 t) \widehat{v}_k(\xi) t^k)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = c_1 \|v_k\|_{H^{2m-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^2,$$

де

$$c_1 := \int_{\mathbb{R}} |\partial_\tau^m(\beta(\tau) \tau^k)|^2 d\tau < \infty.$$

Далі

$$\begin{aligned}
\|\xi_j^{2m} \beta(\langle \xi \rangle^2 t) \widehat{v}_k(\xi) t^k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_j|^{4m} |\beta(\langle \xi \rangle^2 t)|^2 |\widehat{v}_k(\xi)|^2 |t|^{2k} d\xi dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi_j|^{4m} |\widehat{v}_k(\xi)|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}} |\beta(\langle \xi \rangle^2 t)|^2 |t|^{2k} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi_j|^{4m} |\widehat{v}_k(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{-4k-2} d\xi \int_{\mathbb{R}} |\beta(\tau)|^2 |\tau|^{2k} d\tau \\
&= c_2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{v}_k(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{4m-4k-2} |\xi_j|^{4m} \langle \xi \rangle^{-4m} d\xi \\
&\leq c_2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\widehat{v}_k(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{4m-4k-2} d\xi.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\|\xi_j^{2m} \beta(\langle \xi \rangle^2 t) \widehat{v}_k(\xi) t^k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c_2 \|v_k\|_{H^{2m-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^2,$$

де

$$c_2 := \int_{\mathbb{R}} |\beta(\tau)|^2 |\tau|^{2k} d\tau < \infty.$$

Нарешті, замінивши у попередній оцінці ξ_j^{2m} на число 1, дістаємо оцінку для першої норми

$$\|\beta(\langle \xi \rangle^2 t) \widehat{v}_k(\xi) t^k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c_2 \|v_k\|_{H^{2m-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^2.$$

Таким чином,

$$\|T_1 v\|_{H^{2m,m}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sum_{k=0}^{r-1} \|v_k\|_{H^{2m-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1})}^2$$

для довільних $v \in (S(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ з деякою сталою $c > 0$, що не залежить від v . Оскільки множина $(S(\mathbb{R}^{n-1}))^r$ є щільною в просторі

$$\bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{2m-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

то цим і доведено обмеженість оператора

$$T_1 : \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{2m-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H^{2m,m}(\mathbb{R}^n). \quad (40)$$

Звідси виведемо обмеженість оператора (38) за допомогою інтерполяції з функціональним параметром відповідних пар просторів Соболева.

Нехай $s_0 = 0$, а парне число s_1 таке, що $s_1 > s$. На підставі (40) маємо лінійні обмежені оператори

$$T_1 : \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s_j-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H^{s_j, s_j/2}(\mathbb{R}^n) \quad \text{для кожного } j \in \{0, 1\}. \quad (41)$$

Застосувавши тут інтерполяцію з функціональним параметром ψ і скориставшись твердженням 3, отримаємо обмежений оператор

$$T_1 : \bigoplus_{k=0}^{r-1} [H^{s_0-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1}), H^{s_1-2k-1}(\mathbb{R}^{n-1})]_{\psi} \rightarrow [H^{s_0, s_0/2}(\mathbb{R}^n), H^{s_1, s_1/2}(\mathbb{R}^n)]_{\psi}. \quad (42)$$

Він є звуженням оператора (41) при $j = 0$.

В результаті обмеженість оператора (38) є прямим наслідком обмеженості оператора (42) і інтерполяційних рівностей (23) та (28).

Тепер рівність (39) продовжується за неперервністю на всі вектори

$$v \in \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\mathbb{R}^{n-1}),$$

тобто оператор (38) є правим оберненим до оператора (33).

Для подальших міркувань нам будуть потрібні такі аналоги операторів (33) і (38).

Для кожної функції $w \in H^{s,s/2,\varphi}(\Pi)$ покладемо $R_\Pi w := R_{\mathbb{R}^{n-1}}u$, де функція $u \in H^{s,s/2,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ така, що $u|_\Pi = w$. Це означення коректне, тобто не залежить від зробленого вибору функції u . Лінійне відображення $w \mapsto R_\Pi w$ задає обмежений оператор

$$R_\Pi : H^{s,s/2,\varphi}(\Pi) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}). \quad (43)$$

Це є прямим наслідком обмеженості оператора (33) і означення норми у просторі $H^{s,s/2,\varphi}(\Pi)$.

Для кожного вектора

$$v := (v_0, v_1, \dots, v_{r-1}) \in \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$$

покладемо $T_\Pi v := (T_1 v)|_\Pi$. Звісно, лінійне відображення $v \mapsto T_\Pi v$ є обмеженим оператором

$$T_\Pi : \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow H^{s,s/2,\varphi}(\Pi). \quad (44)$$

Відмітимо, що

$$R_\Pi T_\Pi v = R_\Pi (T_1 v)|_\Pi = R_{\mathbb{R}^{n-1}} T_1 v = v$$

для довільного

$$v \in \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Отож оператор (44) є правим оберненим до оператора (43).

Тепер потрібний нам оператор (36) побудуємо за допомогою оператора (44) та локального "розпрямлення" і "склеювання" многовидів Γ та S .

Довільно виберемо скінченний атлас із C^∞ -структури на Γ , утворений локальними картами $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \dots, \lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ . Окрім цього, довільно виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1, \dots, \lambda$, такі, що $\text{supp } \chi_j \subset \Gamma_j$ і $\sum_{j=1}^\lambda \chi_j \equiv 1$ на Γ .

За означенням простору $H^{\sigma,\varphi}(\Gamma)$, лінійне відображення "розпрямлення"

$$L : v \mapsto ((\chi_1 v) \circ \theta_1, \dots, (\chi_\lambda v) \circ \theta_\lambda),$$

де $v \in L_2(\Gamma)$, задає ізометричний оператор

$$L : H^{\sigma,\varphi}(\Gamma) \rightarrow (H^{\sigma,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1}))^\lambda \quad (45)$$

для кожного $\sigma > 0$. Тут і далі, як звичайно, символ "o" позначає композицію відображень.

Розглянемо лінійне відображення "склеювання"

$$K : (h_1, \dots, h_\lambda) \mapsto \sum_{j=1}^\lambda \Theta_j ((\eta_j h_j) \circ \theta_j^{-1}),$$

де $h_1, \dots, h_\lambda \in L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Тут для кожного номера $j = 1, \dots, \lambda$ функція $\eta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ така, що $\eta_j = 1$ на множині $\theta_j^{-1}(\text{supp } \chi_j)$. Тут також Θ_j оператор продовження нулем з Γ_j на многовид Γ (оператор Θ_j коректно означений на функціях, носій яких лежить в Γ_j). Це відображення задає обмежений оператор

$$K : (H^{\sigma, \varphi}(\mathbb{R}^{n-1}))^\lambda \rightarrow H^{\sigma, \varphi}(\Gamma),$$

для кожного $\sigma > 0$, який є лівим оберненим до оператора (45) (див. [14], доведення теореми 2.2).

Для бічної поверхні S аналогом K служить таке лінійне відображення:

$$K_S : (g_1(\cdot, t), \dots, g_\lambda(\cdot, t)) \mapsto K(g_1(\cdot, t), \dots, g_\lambda(\cdot, t))$$

для майже всіх $t \in (0, \tau)$. Тут $g_1, \dots, g_\lambda \in L_2(\Pi)$. Воно задає обмежений оператор

$$K_S : (H^{\sigma, \sigma/2, \varphi}(\Pi))^\lambda \rightarrow H^{\sigma, \sigma/2, \varphi}(S) \quad (46)$$

для кожного $\sigma > 0$ (див. [27], доведення теореми 2).

Нехай

$$v := (v_0, v_1, \dots, v_{r-1}) \in \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\Gamma).$$

Для кожного номера $k = 0, \dots, r-1$ покладемо $Lv_k := (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{\lambda k})$. Розглянемо лінійне відображення

$$T : v \mapsto K_S(T_\Pi(v_{10}, v_{11}, \dots, v_{1, r-1}), \dots, T_\Pi(v_{\lambda 0}, v_{\lambda 1}, \dots, v_{\lambda, r-1})).$$

З обмеженості операторів (44), (45) і (46) випливає, що воно задає обмежений оператор (36). Він є правим оберненим до оператора (34). Справді, для довільного вектора

$$v = (v_0, v_1, \dots, v_{r-1}) \in \bigoplus_{k=0}^{r-1} H^{s-2k-1, \varphi}(\Gamma)$$

і номера $k \in \{0, \dots, r-1\}$ маємо рівності

$$\begin{aligned} (R_\Gamma T v)_k &= \left(R_\Gamma K_S(T_\Pi(v_{10}, \dots, v_{1, r-1}), \dots, T_\Pi(v_{\lambda 0}, \dots, v_{\lambda, r-1})) \right)_k \\ &= K \left((R_\Pi T_\Pi(v_{10}, \dots, v_{1, r-1}))_k, \dots, (R_\Pi T_\Pi(v_{\lambda 0}, \dots, v_{\lambda, r-1}))_k \right) \\ &= K((v_{10}, \dots, v_{1, r-1})_k, \dots, (v_{\lambda 0}, \dots, v_{\lambda, r-1})_k) = K(v_{1k}, \dots, v_{\lambda k}) \\ &= K L v_k = v_k. \end{aligned}$$

Тут індекс k при векторі позначає k -ту компоненту цього вектора. Отже, $R_\Gamma T v = v$.

Лема 3 доведена.

Перейдемо до встановлення інтерполяційних формул для просторів $\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$ і $\mathcal{Q}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$, до яких належать праві частини досліджуваних задач. З означення цих просторів випливає, що інтерполяційні формули для них потрібні у випадках, коли

$s \notin \{2r + 3/2 : r \in \mathbb{N}\}$ або $s \notin \{2r + 1/2 : r \in \mathbb{N}\}$ відповідно. Тому розглянемо такі інтервали:

$$D_0 = (2, 7/2), \quad D_r = (2r + 3/2, 2r + 7/2) \quad \text{для всіх } r \in \mathbb{N},$$

$$N_0 = (2, 5/2), \quad N_r = (2r + 1/2, 2r + 5/2) \quad \text{для всіх } r \in \mathbb{N}.$$

Наступну лему доведемо в припущенні, що s належить одному з цих інтервалів.

Лема 4. *Нехай задано довільні $r \in \mathbb{N}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. У припущенні, що $s_0 < s < s_1$, правильні такі рівності:*

$$\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi} = [\mathcal{Q}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi \quad \text{при } s_0, s, s_1 \in D_{r-1}, \quad (47)$$

і

$$\mathcal{Q}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi} = [\mathcal{Q}_N^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_N^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi \quad \text{при } s_0, s, s_1 \in N_{r-1} \quad (48)$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення. Доведення формул (47) і (48) спирається на твердження 2 (у частині інтерполяції підпросторів) та інтерполяційні формули для соболевських просторів \mathcal{H}_D^\cdot та \mathcal{H}_N^\cdot відповідно.

Спочатку доведемо формулу (47). Відмітимо, що елементи усіх просторів $\mathcal{Q}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2, \varphi}$, де $\sigma \in D_{r-1}$, задовольняють одні і ті самі умови узгодження. Справді, для всіх $\sigma \in D_{r-1}$ число $(\sigma - 3/2)/2 \in \mathbb{Q}$, а його ціла частина $[(\sigma - 3/2)/2] = r - 1$. Отже, у цьому випадку умовами узгодження для елементів просторів $\mathcal{Q}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2, \varphi}$ є рівності (14), записані для кожного $k \in \{0, \dots, r-1\}$.

Побудуємо лінійний оператор $P^{(r)}$, який для кожного числа $\sigma \in D_{r-1}$ буде проектором соболевського простору $\mathcal{H}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2}$ на його підпростір $\mathcal{Q}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2}$. Для довільного вектора $(f, g, h) \in \mathcal{H}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2}$ покладемо

$$g^* := g + T(v_0 \upharpoonright \Gamma - g \upharpoonright \Gamma, \dots, v_{r-1} \upharpoonright \Gamma - \partial_t^{r-1} g \upharpoonright \Gamma). \quad (49)$$

Тут функції v_0, \dots, v_{r-1} означені за рекурентними формулами (15), а T є оператором (36), де $s := \sigma - 1/2$. Розглянемо відображення

$$P^{(r)} : (f, g, h) \mapsto (f, g^*, h),$$

де $(f, g, h) \in \mathcal{H}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2}$. Оператор $P^{(r)}$ є шуканим. Справді, він є лінійним обмеженим оператором на просторі $\mathcal{H}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2}$. З його побудови випливає, що $P^{(r)}(f, g, h) \in \mathcal{Q}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2}$ для довільного $(f, g, h) \in \mathcal{H}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2}$. Більш того, якщо $(f, g, h) \in \mathcal{Q}_D^{\sigma-2, (\sigma-2)/2}$, то $P^{(r)}(f, g, h) = (f, g, h)$. Справді, у цьому випадку правильні рівності (14). З них та з формули (49) випливає, що $g^* = g$.

Тепер скористаємося твердженням 2. Згідно з ним пара

$$[\mathcal{Q}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]$$

є припустимою і правильна рівність

$$[\mathcal{Q}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi = [\mathcal{H}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{H}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi \cap \mathcal{Q}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}. \quad (50)$$

Права частина цієї рівності є підпростором інтерполяційного простору

$$[\mathcal{H}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{H}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi.$$

На підставі твердження 3 і формул (24), (26) і (27) можемо записати так:

$$\begin{aligned}
& [\mathcal{H}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{H}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi \\
&= [H^{s_0-2, (s_0-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s_0-1/2, s_0/2-1/4}(S) \oplus H^{s_0-1}(G), \\
&\quad H^{s_1-2, (s_1-2)/2}(\Omega) \oplus H^{s_1-1/2, s_1/2-1/4}(S) \oplus H^{s_1-1}(G)]_\psi \\
&= [H^{s_0-2, (s_0-2)/2}(\Omega), H^{s_1-2, (s_1-2)/2}(\Omega)]_\psi \oplus [H^{s_0-1/2, s_0/2-1/4}(S), H^{s_1-1/2, s_1/2-1/4}(S)]_\psi \\
&\quad \oplus [H^{s_0-1}(G), H^{s_1-1}(G)]_\psi \\
&= H^{s-2, (s-2)/2, \varphi}(\Omega) \oplus H^{s-1/2, s/2-1/4, \varphi}(S) \oplus H^{s-1, \varphi}(G) = \mathcal{H}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$[\mathcal{H}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{H}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi = \mathcal{H}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi} \quad (51)$$

з точністю до еквівалентності норм. На підставі (50) і (51) маємо

$$[\mathcal{Q}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi = \mathcal{H}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi} \cap \mathcal{Q}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2} = \mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}. \quad (52)$$

Остання рівність є правильною, оскільки, як було зазначено вище, елементи просторів $\mathcal{Q}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}$ і $\mathcal{Q}_D^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$ задовольняють одні і ті самі умови узгодження.

Формула (48) доводиться за тією ж схемою що і (47) з відповідною заміною просторів \mathcal{H}_D та \mathcal{Q}_D на простори \mathcal{H}_N та \mathcal{Q}_N , умов узгодження (14) на (18), інтервалу D_{r-1} на N_{r-1} . При цьому з'являються несуттєві відмінності, які пов'язані з тим, що у задачі Неймана на інтервалі N_{r-1} на одну умову узгодження менше ніж у задачі Діріхле на інтервалі D_{r-1} з тим же номером $r-1$. Обговоримо ці відмінності.

При $r=1$ у задачі Неймана відсутні умови узгодження і $\mathcal{Q}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi} = \mathcal{H}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi}$. Тому в цьому випадку доведення значно спрощується. А саме, рівність (48) набуває вигляду

$$\mathcal{H}_N^{s-2, (s-2)/2, \varphi} = [\mathcal{H}_N^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{H}_N^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi$$

і доводиться подібно до (51).

При фіксованому $r > 1$ для всіх $\sigma \in N_{r-1}$ число $(\sigma - 5/2)/2$ є дробовим і його ціла частина $[(\sigma - 5/2)/2] = r - 2$. Отже, у цьому випадку умовами узгодження елементів усіх просторів $\mathcal{Q}_N^{\sigma-2, (\sigma-2)/2, \varphi}$ є рівності (18), записані для всіх $k \in \{0, \dots, r-2\}$, а формула (49) набуває вигляду

$$g^* := g + T((\partial_\nu v_0) \upharpoonright \Gamma - g \upharpoonright \Gamma, \dots, (\partial_\nu v_{r-2}) \upharpoonright \Gamma - \partial_t^{r-1} g \upharpoonright \Gamma).$$

Тут функції v_0, \dots, v_{r-2} означені за рекурентними формулами (15), а T є оператором (36), де $s := \sigma - 3/2$.

Лема 4 доведена.

Переходимо до доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Спочатку розглянемо випадок, коли $s \notin \{2r + 3/2 : r \in \mathbb{N}\}$. Тоді $s \in D_{r-1}$ для деякого $r \in \mathbb{N}$. Виберемо такі числа $s_0, s_1 \in D_{r-1}$, що $s_0 < s < s_1$ і $s_0, s_1 \notin \{k + 1/2, 2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$. Завдяки згаданий вище теоремі Ліонса–Мадженеса маємо ізоморфізми у просторах Соболева

$$\Lambda_D : H^{s_j, s_j/2}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_D^{s_j-2, (s_j-2)/2} \quad \text{для кожного } j \in \{0, 1\}. \quad (53)$$

Застосувавши інтерполяцію з функціональним параметром ψ до (53), отримаємо ще один ізоморфізм

$$\Lambda_D : [H^{s_0, s_0/2}(\Omega), H^{s_1, s_1/2}(\Omega)]_\psi \leftrightarrow [\mathcal{Q}_D^{s_0-2, (s_0-2)/2}, \mathcal{Q}_D^{s_1-2, (s_1-2)/2}]_\psi. \quad (54)$$

Цей ізоморфізм є розширенням по неперервності відображення (11) оскільки $C^\infty(\bar{\Omega})$ щільно в області визначення (54). Застосувавши у (54) інтерполяційні формули (27) та (47) отримаємо (17).

Нехай тепер $s \in \{2r + 3/2 : r \in \mathbb{N}\}$. За доведеним маємо ізоморфізми

$$\Lambda_D : H^{s \pm \varepsilon, (s \pm \varepsilon)/2, \varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_D^{s-2 \pm \varepsilon, (s-2 \pm \varepsilon)/2, \varphi}. \quad (55)$$

Тут $\varepsilon \in (0; 1/2)$ те саме, що і у (16). Застосувавши інтерполяцію з числовим параметром $1/2$ до (55), отримаємо ще один ізоморфізм

$$\Lambda_D : [H^{s-\varepsilon, (s-\varepsilon)/2, \varphi}(\Omega), H^{s+\varepsilon, (s+\varepsilon)/2, \varphi}(\Omega)]_{1/2} \leftrightarrow [\mathcal{Q}_D^{s-2-\varepsilon, (s-2-\varepsilon)/2, \varphi}, \mathcal{Q}_D^{s-2+\varepsilon, (s-2+\varepsilon)/2, \varphi}]_{1/2}. \quad (56)$$

Тепер за допомогою твердження 4 та рівності (27) покажемо, що для довільних дійсних чисел $s > 0$ і $\varepsilon > 0$ таких, що $s - \varepsilon > 0$, і довільного функціонального параметра $\varphi \in \mathcal{M}$ правильна рівність

$$H^{s, s/2, \varphi}(\Omega) = [H^{s-\varepsilon, (s-\varepsilon)/2, \varphi}(\Omega), H^{s+\varepsilon, (s+\varepsilon)/2, \varphi}(\Omega)]_{1/2} \quad (57)$$

з точністю до еквівалентності норм.

Виберемо дійсне $\delta > 0$ так, щоб $s - \varepsilon - \delta > 0$. Згідно з (27) маємо

$$H^{s-\varepsilon, (s-\varepsilon)/2, \varphi}(\Omega) = [H^{s-\varepsilon-\delta, (s-\varepsilon-\delta)/2}(\Omega), H^{s+\varepsilon+\delta, (s+\varepsilon+\delta)/2}(\Omega)]_\alpha$$

і

$$H^{s+\varepsilon, (s+\varepsilon)/2, \varphi}(\Omega) = [H^{s-\varepsilon-\delta, (s-\varepsilon-\delta)/2}(\Omega), H^{s+\varepsilon+\delta, (s+\varepsilon+\delta)/2}(\Omega)]_\beta.$$

Тут інтерполяційні параметри α і β означаються за формулами

$$\alpha(t) := t^{\delta/(2\varepsilon+2\delta)} \varphi(t^{1/(2\varepsilon+2\delta)}), \quad \beta(t) := t^{(2\varepsilon+\delta)/(2\varepsilon+2\delta)} \varphi(t^{1/(2\varepsilon+2\delta)}) \quad \text{при } t \geq 1$$

і $\alpha(t) = \beta(t) := 1$ при $0 < t < 1$. Звідси за твердженням 4 маємо

$$\begin{aligned} & [H^{s-\varepsilon, (s-\varepsilon)/2, \varphi}(\Omega), H^{s+\varepsilon, (s+\varepsilon)/2, \varphi}(\Omega)]_{1/2} \\ &= \left[[H^{s-\varepsilon-\delta, (s-\varepsilon-\delta)/2}(\Omega), H^{s+\varepsilon+\delta, (s+\varepsilon+\delta)/2}(\Omega)]_\alpha, [H^{s-\varepsilon-\delta, (s-\varepsilon-\delta)/2}(\Omega), H^{s+\varepsilon+\delta, (s+\varepsilon+\delta)/2}(\Omega)]_\beta \right]_{1/2} \\ &= [H^{s-\varepsilon-\delta, (s-\varepsilon-\delta)/2}(\Omega), H^{s+\varepsilon+\delta, (s+\varepsilon+\delta)/2}(\Omega)]_\omega. \end{aligned} \quad (58)$$

Тут інтерполяційний параметр ω визначається за формулами

$$\omega(t) := \alpha(t)(\beta(t)/\alpha(t))^{1/2} = t^{1/2} \varphi(t^{1/(2\varepsilon+2\delta)}) \quad \text{при } t \geq 1$$

і $\omega(t) := 1$ при $0 < t < 1$. Тому на підставі формули (27) маємо

$$[H^{s-\varepsilon-\delta, (s-\varepsilon-\delta)/2}(\Omega), H^{s+\varepsilon+\delta, (s+\varepsilon+\delta)/2}(\Omega)]_\omega = H^{s, s/2, \varphi}(\Omega). \quad (59)$$

Тепер з рівностей (58) і (59) випливає формула (57). Оскільки рівності (58) і (59) виконуються з точністю до еквівалентності норм, то так само буде і для рівності (57).

Для завершення доведення теореми залишилось застосувати до (56) інтерполяційну формулу (57) і означення простору $\mathcal{Q}_D^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$. В результаті отримаємо ізоморфізм (17).

Теорема 1 доведена.

Теорема 2 доводиться за тією ж схемою, що і теорема 1 з відповідною заміною інтервалу D_{r-1} на інтервал N_{r-1} , відображення Λ_D на відображення Λ_N і просторів \mathcal{Q}_D на простори \mathcal{Q}_N .

Зауваження 1. Означені за формулами (16) і (19) простори не залежать з точністю до еквівалентності норм від вибору числа $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Справді, з теореми 1 випливає, що для $s \in \{2r + 3/2 : r \in \mathbb{N}\}$ виконується ізоморфізм

$$\Lambda_D : H^{s,s/2,\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}_{D,\varepsilon}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}. \quad (60)$$

Тут

$$\mathcal{Q}_{D,\varepsilon}^{s-2,(s-2)/2,\varphi} := [\mathcal{Q}_D^{s-2-\varepsilon,(s-2-\varepsilon)/2,\varphi}, \mathcal{Q}_D^{s-2+\varepsilon,(s-2+\varepsilon)/2,\varphi}]_{1/2}.$$

З ізоморфізму (60) негайно випливає, що простір $\mathcal{Q}_{D,\varepsilon}^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$ не залежить від ε з точністю до еквівалентності норм. Цілком аналогічно з теореми 2 випливає, що простір $\mathcal{Q}_N^{s-2,(s-2)/2,\varphi}$, означений за формулою (19), не залежить з точністю до еквівалентності норм від ε .

Література

- [1] Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи матем. наук. – 1964. – **19**, № 3. – С. 53–161.
- [2] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
- [3] Lions J.-L. Magenes E. Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Applications. – Vol. II. – Berlin: Springer, 1972. – xi+242 p.
- [4] Житарашу Н. В. Теоремы о полном наборе изоморфизмов в L_2 -теории обобщенных решений граничных задач для одного параболического по И.Г. Петровскому уравнения // Математический сборник. – 1985. – **128(170)**, № 4. – С. 451–473.
- [5] Eidel'man S. D., Zhitashu N. V. Parabolic boundary value problems. – Operator Theory: Advances and Applications, 101. – Basel: Birkhäuser, 1998. – xii+298 p.
- [6] Eidel'man S. D. Parabolic equations // Encycl. Math. Sci. Vol. 63. Partial differential equations, VI. – Berlin: Springer, 1994. – P. 205–316.
- [7] Ивасишен С. Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Выща школа, 1990. – 200 с.
- [8] Hörmander L. Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир, 1965. – 380 с.)

- [9] *Лизоркин П. И.* Пространства обобщенной гладкости // *Х. Трибель. Теория функциональных пространств.* – Москва: Мир, 1986. – С. 381–415.
- [10] *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem. – Berlin: Wiley–VCH, 2000. – 348 p.
- [11] *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
- [12] *Farkas W., Leopold H.-G.* Characterisations of function spaces of generalized smoothness // *Ann. Mat. Pura Appl.* – 2006. – **185**, No 1. – P. 1–62.
- [13] *Nicola F., Rodino L.* Global Pseudodifferential Calculus on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – xi+306 p.
- [14] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin: De Gruyter, 2014. – xiv+297 p.
- [15] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // *Banach J. Math. Anal.* – 2012. – **6**, No. 2. – P. 211–281.
- [16] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // *Ukrainian Math. J.* – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
- [17] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III // *Ukrainian Math. J.* – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
- [18] *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold. // *Ukrainian Math. J.* – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
- [19] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // *Ukrainian Math. J.* – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
- [20] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // *Methods Funct. Anal. Topology* **14** (2008), no. 1, 81–100.
- [21] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.
- [22] *Los V., Murach A. A.* Parabolic problems and interpolation with a function parameter. – *Methods Funct. Anal. Topology.* – 2013. – **19**, No. 2. – P. 146–160
- [23] *Лось В. М., Мурач О. О.* Про гладкість розв’язків параболических мішаних задач. – Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – 2013. – **10**, № 2. – С. 219–234.
- [24] *Лось В. Н., Мурач А. А.* Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости. // *Доповіді НАН України.* – 2014. – № 6. – С. 23–31.
- [25] *Лось В. М.* Параболические смешанные задачи для систем Петровского в пространствах узагальненої гладкості. // *Доповіді НАН України.* – 2014. – № 10. – С. 24–32.
- [26] *Лось В. М.* Мішані задачі для двовимірного рівняння теплопровідності у анізотропних просторах Хермандера. // *Український математичний журнал.* – 2015. – **67**, № 5. – С. 645–656.

- [27] *Лось В. М.* Анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні циліндра. // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 2. – С. 226–237.
- [28] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.
- [29] *Солонников В.А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа // Труды МИАН СССР – 1964. – **70** – С. 133–212.
- [30] *Bergh J., Löfström J.* Interpolation Spaces. – Berlin: Springer, 1976.
- [31] *Triebel H.* Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators (2-nd edn). – Heidelberg: Johann Ambrosius Barth, 1995.
- [32] *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1975. – 480 с.
- [33] *Слободецкий Л.Н.* Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. – Ученые записки Ленинградского гос. пед. ин-та. – 1958. – **197**. – С. 54–112.